§12 C^*-Algebren von kompakten Operatoren

Wir wollen jetzt eine Klasse von C^*-Algebren kennen lernen, für die die irred. Darst. bereits die ganze Darstellungstheorie (und damit auch die Struktur der Algebra) bestimmen. Die hier betrachteten Algebren sind Unteralgebren $\mathcal{K}(H)$, der Algebra der kompakten Operatoren auf H.

<u>Erinnerung</u> (FA, §16) Ist $T \in \mathcal{K}(H)$, so gilt für jedes $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, dass λ ein EW von T ist mit $\dim E_\lambda = \dim(\mathrm{Ker}(T - \lambda 1)) < \infty$. Ist T normal, so gilt

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_\lambda \quad , \quad H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda$$

mit $P_\lambda : H \to E_\lambda$ die orthog. Projektion.

Ferner gilt: $\{0\}$ ist einziger Häufungspunkt von $\sigma(T)$ und für $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ ist

$$1_{\{\lambda\}} : \sigma(T) \to \mathbb{R}, \quad 1_{\{\lambda\}}(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu = \lambda \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine stetige Fkt. auf $\sigma(T)$ mit $1_{\{\lambda\}}(0) = 0$, und dann gilt $\quad P_\lambda = 1_{\{\lambda\}}(T)$. (Blatt 5, Aufg 3).

<u>Insb. folgt</u>: Ist $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ C^*-Unteralg., $T \in A$ normal und $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$, so gilt auch $P_\lambda = 1_{\{\lambda\}}(T) \in A$!

<u>12.1</u> <u>Lemma</u> Seien A eine C^*-Algebra und $p, q \in A$ Projektionen ($p \in A$ heißt Projektion,

wenn $p = p^* = p^2$). Dann sind äquivalent:

(1) $q \leq p$

(2) $qp = pq = q$

(3) (falls $A \subseteq L(H)$): $q(H) \subseteq p(H)$.

Bew: Nach Gelfand-Naimark können wir o.B.d.A. $A \subseteq L(H)$ annehmen. Dann gilt für $a \in A$: $a \geq 0 \iff \langle a\xi, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in H$.

(1) $\Rightarrow$ (3) $q \leq p \iff \langle q\xi, \xi \rangle \leq \langle p\xi, \xi \rangle \;\forall \xi \in H$

Ann: $\exists\, \xi \in q(H)$ mit $\xi \notin p(H)$.

Zerlege $\xi = \xi_1 + \xi_2$ mit $\xi_1 \in p(H)$, $\xi_2 \in p(H)^\perp$.

Dann folgt: $\xi_2 \neq 0$ und $\|\xi\|^2 = \|\xi_1\|^2 + \underbrace{\|\xi_2\|^2}_{\neq 0}$

Da $q(\xi) = \xi$ gilt dann

$\|\xi\|^2 = \langle q\xi, \xi \rangle \leq \langle p\xi, \xi \rangle = \langle \xi_1, \xi \rangle = \|\xi_1\|^2 < \|\xi\|^2$,

ein Widerspruch!

(3) $\Rightarrow$ (1) klar.

(3) $\Rightarrow$ (2) Ist $q(H) \subseteq p(H)$, so besitzt jedes $\xi \in H$ eine orthog. Zerlegung $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ mit $\xi_1 \in q(H)$, $\xi_2 \in p(H) \cap q(H)^\perp$, $\xi_3 \in p(H)^\perp$.

Dann folgt

$$qp(\xi) = q(\xi_1 + \xi_2) = \xi_1 = q(\xi) \overset{q(\xi) \in p(H)}{=} pq(\xi)$$

(2) $\Rightarrow$ (3) $pq = q \Rightarrow p(\xi) = \xi \;\; \forall \xi \in q(H)$, und damit $q(H) \subseteq p(H)$. ∎

[Beachte: Wir haben benutzt: Ist $p \in L(H)$ orthog. Proj., so gilt
$$p(H) = \{\xi \in H \mid p(\xi) = \xi\}.]$$

12.3 Def: Sei A eine C^*-Alg. und sei $0 \neq p \in A$ eine Projektion. Dann heißt p <u>minimale</u>

Projektion in A, wenn für alle Projekt. $0 \neq q \in A$ mit $q \leq p$ schon $q = p$ folgt.

Bsp: 1-dimensionale Proj. in $L(H)$.
(2) Sei
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \,\middle|\, T \in M_2(\mathbb{C}) \right\} \subseteq M_4(\mathbb{C}).$$
Dann ist $p = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 \end{array}\right)$ eine minimale Proj. in A, aber p ist nicht minimal in $M_4(\mathbb{C})$!

12.3 Lemma Sei $A \subseteq K(H)$ C^*-Unteralgebra. Ist dann $0 \neq p \in A$, so gilt
$$p \text{ minimal} \iff pAp = \mathbb{C}p.$$

Bezeichnung: Ist A eine C^*-Algebra und $p \in A$ eine Proj., so heißt pAp eine Ecke in A.

Bew. von 12.3: „$\Leftarrow$" Sei $pAp = \mathbb{C}p$. Ist dann $0 \neq q \in A$ eine Projektion mit $q \leq p$, so gilt
$q = pqp = \lambda p$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Da q Projektion folgt $\lambda^2 = \lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \{0,1\}$ und da $q \neq 0$ folgt $\lambda = 1$, also $q = p$.
„$\Rightarrow$" Sei nun $p \in A$ minimal und sei $a \in A$.
Zeige: $pap = \lambda p$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.
Durch Zerlegen von a in $\mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Im}(a)$ können wir o.B.d.A. $a = a^*$ annehmen. Dann gilt auch $(pap)^* = pap$ und es gilt
$$pap = \sum_{\lambda \in \sigma(pap)} \lambda P_\lambda \quad \text{mit } P_\lambda \in A \quad \forall 0 \neq \lambda \in \sigma(pap).$$
Beh.: Es gilt $P_\lambda \leq p$ für alle $0 \neq \lambda \in \sigma(pap)$.
Denn: $p(H)^\perp = \mathrm{Ker}\, p \subseteq \mathrm{Kern}\,(pap) \subseteq \mathrm{Kern}(P_\lambda)$
$= P_\lambda(H)^\perp$, also $P_\lambda(H) \subseteq p(H)$.

Damit folgt: $p_\lambda = p$ für alle $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$.
Dann folgt $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda\}$ für ein λ und
$$pap = \lambda p. \qquad \blacksquare$$

12.4 <u>Lemma</u>: Sei $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ C^*-Unteralg. Dann ist jede Projektion p in A eine endl. orthog. Summe von endl. vielen minimalen Projektionen in A, d.h.
$$p = p_1 + \dots + p_\ell \text{ mit } p_i \text{ minimal}, \; p_i p_j = 0 \; \forall i \neq j$$

<u>Bew</u>: Induktion nach $\dim(p) := \dim(p(H))$.
[Ist $p \in \mathcal{K}(H)$ Projektion, so gilt $\dim(p(H)) < \infty$, da $p|_{p(H)} = id_{p(H)}$ kompakt.]

Ist $\dim(p) = 1$, so ist klar, dass p minimal.
<u>$n \to n+1$</u>: Sei $p \in A$ mit $\dim(p) = n+1$.
Ist p nicht minimal, so ex. Projekt. $0 \neq q < p$.
Dann gilt $p = q + (p-q)$ mit $q, p-q$ Proj. und $q(p-q) = qp - q^2 = q - q = 0$, und $\dim(q), \dim(p-q) \leq n$. Nach Ind.-Vor. ex. $p_1, \dots, p_\ell, p_{\ell+1}, \dots, p_m$ mit $p_i p_j = 0 \; \forall i \neq j$,
$$q = p_1 + \dots + p_\ell, \quad p - q = p_{\ell+1} + \dots + p_m. \qquad \blacksquare$$

12.5 <u>Satz</u>: Ist $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ irreduzibel (d.h. $id: A \to \mathcal{K}(H) \subseteq \mathcal{L}(H)$ ist irreduzibel), so gilt $A = \mathcal{K}(H)$.

<u>Bew</u>: <u>Strategie</u>: Zeige, dass A jede Proj. vom Rang 1 (also $\dim(p) = 1$) enthält. Daraus folgt, dass A <u>jede Projektion</u> von endl. Rang enthält (= endl. Summe von Proj.

vom Rang 1). Mit der Zerlegung

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_\lambda \quad \text{für } T = T^* \in \mathcal{K}(H)$$

und $\dim(P_\lambda) < \infty$ folgt dann, dass A jeden selbstadj. kompakten Operator enthält.
Mit $T = \mathrm{Re}(T) + i\,\mathrm{Im}(T)$ folgt dann $\mathcal{K}(H) \subseteq A$.

1. Schritt: Zeige: $\exists$ Projektion $p \in A$ mit $\dim(p) = 1$.
Zunächst gilt: $\exists$ Proj. $0 \neq \tilde{p} \in A$, denn $A \neq \{0\}$ und für $0 \neq a = a^* \in A$ gilt $\sigma(a) \neq \{0\}$, und für $0 \neq \lambda \in \sigma(a)$ gilt $p_\lambda \in A$. Nach 12.4 ist P_λ orthog. direkte Summe von minimalen Proj. in A, also ex. eine minimale Proj. $0 \neq p \in A$.
Beh: Ist $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ irreduzibel, so gilt
$p \in A$ minimale Proj. $\Rightarrow \dim(p) = 1$.
Sei dazu $0 \neq \xi \in p(H)$ und sei $\eta \in p(H)$ mit $\eta \perp \xi$. Zeige: $\eta = 0$.
Da p minimal gilt $pAp = \mathbb{C}p$, also folgt für alle $a \in A$: $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$\langle a\xi, \eta\rangle = \langle ap\xi, p\eta\rangle = \langle pap\xi, \eta\rangle = \langle \lambda\xi, \eta\rangle \overset{\xi \perp \eta}{=} 0$$

Da $A \subseteq L(H)$ irreduzibel, folgt $\overline{A\xi} = H$, also $\eta \in H^\perp = \{0\}$.

2. Schritt: Ist $q \in L(H)$ bel. Projektion mit $\dim(q) = 1$, so gilt $q \in A$.
Dazu: Ist $\eta \in q(H)$ mit $\|\eta\| = 1$, so gilt $\forall \xi \in H$:
$q\xi = \langle \xi, \eta\rangle \eta$ (da q Proj. auf $\mathbb{C}\eta \subseteq H$).
Ist dann $p \in A$ wie in Schritt 1 und $\xi \in p(H)$ mit $\|\xi\| = 1$, so ex. wegen $\overline{A\xi} = H$ eine Folge

$(a_n)_n$ in H mit $a_n\xi \to \eta$ und $\|a_n\xi\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (sonst normieren wir die a_n passend). Dann gilt $a_n p a_n^* \in A$ $\forall n$ und für $v \in H$ folgt:

$$\|(a_n p a_n^* - q)v\| = \|a_n p(a_n^* v) - \langle v,\eta\rangle\eta\|$$

$$= \|a_n \langle a_n^* v, \xi\rangle \xi - \langle v,\eta\rangle\eta\|$$

$$= \|\langle v, a_n\xi\rangle a_n\xi - \langle v,\eta\rangle\eta\|$$

$$= \|\langle v, a_n\xi - \eta\rangle a_n\xi - \langle v,\eta\rangle(a_n\xi - \eta)\|$$

$$\leq 2\|v\|\|a_n\xi - \eta\| \quad (\text{da } \|a_n\xi\| = \|\eta\| = 1).$$

Damit folgt $\|a_n p a_n^* - q\| \leq 2\|a_n\xi - \eta\| \to 0$, also $q \in A$. ∎

12.6 <u>Notation</u> Eine C^*-Algebra A heißt <u>einfach</u>, wenn $\{0\}$ und A die einzigen abg. Ideale in A sind. (das ist äquiv. zu $\mathrm{Prim}(A) = \{0\}$).

12.7 <u>Satz</u> $\mathrm{id}: \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H) \subseteq \mathcal{L}(H)$ ist irreduzibel und $\mathcal{K}(H)$ ist einfach. Ferner gilt $\mathcal{K}(H)\xi = H$ für alle $0 \neq \xi \in H$.

<u>Bew:</u> Sei $0 \neq \xi \in H$. Ist dann $0 \neq \eta \in H$ bel., so def. $T_{\xi,\eta}: H \to H$, $T_{\xi,\eta}(v) = \langle v,\xi\rangle\eta$.

Dann gilt $\mathrm{Rang}(T_{\xi,\eta}) = 1$, also $T_{\xi,\eta} \in \mathcal{K}(H)$ und $T_{\xi,\eta}(\xi) = \|\xi\|^2\eta$, also $T_{\xi,\eta}\left(\frac{1}{\|\xi\|^2}\xi\right) = \eta$.

Es folgt $\mathcal{K}(H)\xi = H$. Insb. ist jeder Vektor $0 \neq \xi \in H$ zyklisch, also ist $\mathrm{id}: \mathcal{K}(H) \to \mathcal{L}(H)$ irreduzibel nach 11.2. Ist schließlich $0 \neq I \subseteq \mathcal{K}(H)$ ein Ideal, so ist $\mathrm{id}|_I \neq \{0\}$, also ist $\mathrm{id}|_I$ irreduzibel nach Blatt 9, Aufgabe 2. Mit 12.5 folgt $I = \mathcal{K}(H)$. ☒

<u>12.8 Folgerung</u>: Ist A ein C^*-Alg. und ist $\pi: A \to L(H)$ irreduzibel mit $\pi(A) \cap \mathcal{K}(H) \neq \{0\}$, so gilt $\mathcal{K}(H) \subseteq \pi(A)$.

<u>Bew</u>: Es gilt $\pi: A \to L(H)$ ist irreduzibel g.d.w. $id: \pi(A) \hookrightarrow L(H)$ ist irreduzibel. Da $\mathcal{K}(H)$ ein abg. Ideal in $L(H)$ ist $\pi(A) \cap \mathcal{K}(H)$ ein abg. Ideal in $\pi(A)$. Da $\pi(A) \cap \mathcal{K}(H) \neq \{0\}$ folgt mit Blatt 9, Aufg. 2 auch $id: \pi(A) \cap \mathcal{K}(H) \hookrightarrow L(H)$ irreduzibel, also $\pi(A) \cap \mathcal{K}(H) = \mathcal{K}(H)$ nach 12.5. ☒

<u>12.9 Lemma</u> Sei $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ eine C^*-Algebra und sei $p \in A$ minimale Projektion. Sei $\xi \in p(H)$ mit $\|\xi\| = 1$ und sei $H_0 := \overline{A\xi} \subseteq H$. Dann gelten:

(1) $A|_{H_0} = \{a|_{H_0} \mid a \in A\} = \mathcal{K}(H_0)$.

(2) Die Darst. $\pi_0: A \to L(H_0)$; $\pi_0(a) = a|_{H_0}$ ist irreduzibel.

<u>Bsp</u>. Sei $H = \mathbb{C}^4$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \middle| T \in M_2(\mathbb{C}) \right\} \subseteq M_4(\mathbb{C})$.

Ist dann $p = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right)$ und $\xi = e_1$, so gilt

$H_0 = A\xi = LH\{e_1, e_2\} \simeq \mathbb{C}^2$ und $A|_{H_0} \simeq M_2(\mathbb{C})$.

<u>Bew. von 12.9</u>: Sei $T \in L(H_0)$ mit $Ta = aT$ $\forall a \in A|_{H_0}$.

<u>Zup</u>: $T = \lambda 1$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Mit Schur folgt dann (2). Setze $S := T - \langle T\xi, \xi \rangle 1$. Dann gilt $\langle S\xi, \xi \rangle = 0$.

<u>Beh</u>: $S = 0$ (also $T = \lambda 1$ mit $\lambda = \langle T\xi, \xi \rangle$).

<u>Dazu</u>: Da p minimal gilt nach 12.3: $pAp = \mathbb{C}p$. Sind also $a, b \in A$, so ex. ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit

$pb^*ap = \mu p$. Damit folgt: (wenn $p\xi = \xi$):

$$\langle Sa\xi, b\xi\rangle = \langle Sap\xi, bp\xi\rangle = \langle pb^*Sap\xi, \xi\rangle \overset{(*)}{=} \langle S(pb^*ap)\xi, \xi\rangle = \mu\langle S\xi, \xi\rangle = 0$$

wobei (*) aus der Gleichung $pb^*S = (pb^*|_{H_0})S = S\circ(pb^*)|_{H_0}$ folgt. Da $\overline{A\xi} = H_0$ folgt $S = 0$.

Damit ist $A|_{H_0} \subseteq \mathcal{K}(H_0)$ irreduzibel und mit 12.5 folgt $A|_{H_0} = \mathcal{K}(H_0)$. ∎

12.10 Satz Sei $0 \neq A \subseteq \mathcal{K}(H)$ C^*-Unteralgebra von $\mathcal{K}(H)$. Ist dann $\pi : A \to L(H_\pi)$ eine irreduzible Darst. von A so gilt: Es ex. eine minimale Proj. $p \in A$ und ein $0 \neq \xi \in p(H)$ mit $\|\xi\| = 1$ mit π ist unitär äquivalent zu $\pi_0 : A \to A|_{H_0}$ mit $H_0 = \overline{A\xi}$.
Ferner gilt: Jede nichtentartete Darstellung $\pi : A \to L(H_\pi)$ ist eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

Beweis Sei $\pi : A \to L(H_\pi)$ zunächst eine bel. nichtent. $*$-Darstellung von A. Wir zeigen: Es ex. ein $\pi(A)$-inv. abg. Teilraum $0 \neq \tilde{H} \subseteq H_\pi$ mit $\pi|_{\tilde{H}}$ unitär äquiv. zu einer Darst. $\pi_0 : A \to A|_{H_0}$ wie im Satz. Ist dann π irreduzibel, so folgt $\pi \cong \pi_0$.
1. Schritt: Es ex. eine minimale Proj. $p \in A$ mit $\pi(p) \neq 0$, denn sonst folgt mit 12.4, dass $\pi(q) = 0$ für jede Proj. $q \in A$ und dann folgt mit dem Spektralsatz, dass $\pi(A) = \{0\}$.

Nach 12.3 gilt $pAp = \mathbb{C}p$, und damit ex. ein lin. Funktional $f: A \to \mathbb{C}$ mit $pap = f(a)p$ für alle $a \in A$.
Wähle $\eta \in \pi(p)H_\pi$ mit $\|\eta\| = 1$ und wähle $\xi \in pH$ mit $\|\xi\| = 1$. Setze

$$\tilde{H} := \overline{\pi(A)\eta} \subseteq H_\pi, \quad H_0 := \overline{A\xi}.$$

Ist dann $\tilde{\pi} = \pi|_{\tilde{H}} : A \to L(\tilde{H})$ die Einschr. von π auf $\tilde{H}$, so gilt $\tilde{\pi} \simeq \pi_0$, denn:
<u>Def</u>: $V: H_0 \to \tilde{H}$, $V(a\xi) = \pi(a)\eta \quad \forall a\xi \in A\xi$.
Dann gilt für alle $a, b \in A$:

$$\langle Va\xi, Vb\xi\rangle = \langle \pi(a)\eta, \pi(b)\eta\rangle = \langle \pi(b^*a)\eta, \eta\rangle$$
$$= \langle \pi(b^*a)\pi(p)\eta, \pi(p)\eta\rangle = \langle \pi(pb^*ap)\eta, \eta\rangle$$
$$= \langle \pi(f(b^*a)p)\eta, \eta\rangle = f(b^*a)\langle \eta, \eta\rangle = f(b^*a)$$
$$= \langle f(b^*a)\xi, \xi\rangle = \langle pb^*ap\xi, \xi\rangle = \langle a\xi, b\xi\rangle.$$

Damit ist V unitär, und wegen:

$$V\pi_0(a)(b\xi) = V(ab\xi) = \pi(ab)\eta = \tilde{\pi}(a)(\pi(b)\eta)$$
$$= \tilde{\pi}(a)V(b\xi)$$

gilt $\tilde{\pi} \simeq \pi_0$ vermöge V.
<u>2. Schritt</u>: Eine einfache Anwendung des Lemmas von Zorn (auf alle Teildarstellungen von π, die sich als direkte Summen von irred. Darstellungen zerlegen lassen) liefert die zweite Aussage des Satzes. ∎

Wir erhalten nun eine ganze Reihe von Folgerungen.

<u>12.11 Folgerung</u> $\mathrm{id}: K(H) \to K(H) \subseteq L(H)$ ist bis auf unitäre Äquivalenz die <u>einzige</u>

irreduzible Darstellung von $\mathcal{K}(H)$.
Ferner gilt: Ist $\alpha : \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)$ ein beliebiger $*$-Automorphismus, so ex. ein $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(H)$ $(= \{\mathcal{U} \in L(H) \mid \mathcal{U} \text{ unitär}\})$ mit

$$\alpha(T) = \mathrm{Ad}\,\mathcal{U}(T) := \mathcal{U}T\mathcal{U}^* \quad \forall\, T \in \mathcal{K}(H).$$

<u>Bew:</u> Nach 12.7 ist $\mathrm{id} : \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)$ irreduzibel und nach 12.10 ist jede irred. Darst. von $\mathcal{K}(H)$ eine Teildarst. von id. Damit folgt, dass jede irred. Darst. äquiv. zu id ist.
Ist dann $\alpha : \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)$ ein $*$-Autom., so ist $\alpha : \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H) \subseteq L(H)$ irreduzibel, also folgt $\alpha \simeq \mathrm{id}$. Damit ex. ein $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(H)$ mit $\alpha(T)\mathcal{U} = \mathcal{U}T \ \forall\, T \in \mathcal{K}(H)$, also $\alpha(T) = \mathcal{U}T\mathcal{U}^*$ für alle $T \in \mathcal{K}(H)$. ☒

<u>12.12 Folgerung:</u> Sei $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ C^*-Unteralg. von $\mathcal{K}(H)$. Dann gilt für jede irred. Darst. $\pi : A \to L(H_\pi)$, dass $\pi(A) = \mathcal{K}(H_\pi)$.
<u>Bew:</u> Nach 12.10 gilt $\pi \simeq \pi_0$ mit $\pi_0 : A \to A_{|H_0}$ für ein $H_0 \subseteq H$ mit $A_{|H_0} = \mathcal{K}(H_0)$. (12.09).
Ist dann $\mathcal{U} : H_\pi \to H_0$ unitär mit $\mathcal{U}\pi(a) = \pi_0(a)\mathcal{U}$, so folgt $\pi(A) = \mathcal{U}^*\pi_0(A)\mathcal{U} = \mathcal{U}^*\mathcal{K}(H_0)\mathcal{U} = \mathcal{K}(H_\pi)$. ☒

<u>12.13 Notation:</u> Sei α eine Kardinalzahl und sei I eine Menge mit $|I| = \alpha$. Ist dann $\pi : A \to L(H)$ eine $*$-Darstellung, so setzen wir

$$\alpha \cdot H := \bigoplus_{i \in I} H \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \pi := \bigoplus_{i \in I} \pi : A \to L(\alpha H).$$

$\alpha \cdot \pi$ heißt dann das <u>α-fache</u> von π und hängt bis auf unit. Äquiv. nicht von der Wahl von I ab.

12.14 Bemerkung: Ist $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ ein C^*-Unteralg. und ist $\pi: A \to L(H_\pi)$ eine bel. (nichtent.) $*$-Darst. von A, so folgt aus 12.10: Es ex. eine Indexmenge I und irreduzible Darst. $\pi_i: A \to L(H_i)$ mit $\pi \simeq \bigoplus_{i \in I} \pi_i$. Für jede Klasse $[\varrho] \in \hat{A}$ sei dann $I_\varrho := \{ i \in I \mid \pi_i \simeq \varrho \}$ und sei
$m_\varrho := |I_\varrho|$ die Kardinalität von I_ϱ.
Dann gilt
$$\pi \simeq \bigoplus_{i \in I} \pi_i \simeq \bigoplus_{[\varrho] \in \hat{A}} m_\varrho \cdot \varrho$$

Die Vielfachheit m_ϱ ist dabei eindeutig durch die Darstellung π festgelegt.

Wir wollen noch sehen, wie wir die Vielfachheiten m_ϱ berechnen können:

12.15 Lemma Sei $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ C^*-Unteralg. und sei $p \in A$ minimale Projektion. Dann gelten:
(1) Ist $\varrho: A \to L(H_\varrho)$ irreduzibel, so gilt
$\varrho(p) = 0$ oder $\varrho(p)$ ist Projektion vom Rang 1.
(2) Es ex. genau ein $[\varrho] \in \hat{A}$ mit $\varrho(p) \neq 0$.
(3) Ist $\varrho(p) \neq 0$, so gilt $\overline{\varrho(ApA)} = \varrho(A) = \mathcal{K}(H_\varrho)$, und $\tau(ApA) = \{0\}$ für alle $[\tau] \in \hat{A} \setminus \{[\varrho]\}$.

Beweis: Nach 12.10 gilt: Ist $\varrho: A \to L(H)$ irreduzibel und ist $p \in A$ minimale Proj mit $\varrho(p) \neq 0$, so gilt $\varrho \simeq \pi_0$ mit $\pi_0: A \to A|_{H_0}$, $H_0 = \overline{A\xi}$, $0 \neq \xi \in p(H)$ mit $\|\xi\| = 1$. Wegen
$pA\xi = pAp\xi \overset{12.3}{=} \mathbb{C}p\xi = \mathbb{C}\xi$ ist $\pi_0(p) = p|_{\overline{A\xi}}$ eine Projektion vom Rang 1, und damit ist auch

$\varrho(p)$ ein Proj. vom Rang 1.

(2) Ist $\sigma: A \to L(H_\sigma)$ irreduzibel mit $\sigma(p) \neq 0$, so folgt wie oben $\sigma \simeq \pi_0 \simeq \varrho$, also $\sigma \simeq \varrho$.

(3) Es gilt

$0 \neq \overline{\varrho(ApA)} = \overline{\varrho(A)\varrho(p)\varrho(A)} = \overline{\mathcal{K}(H_\varrho)\varrho(p)\mathcal{K}(H_\varrho)} =: I$

mit $I \subseteq \mathcal{K}(H_\varrho)$ abg. Ideal. Da $\mathcal{K}(H_\varrho)$ einfach (12.7) und $I \neq \{0\}$ folgt $I = \mathcal{K}(H_\varrho)$.

Ist $\sigma: A \to L(H_\varrho)$ irreduzibel mit $\sigma \not\simeq \varrho$, so gilt $\sigma(p) = 0$ nach (2), also auch $\sigma(ApA) = \sigma(A)\sigma(p)\sigma(A) = \{0\}$. ☒

<u>12.16 Folgerung</u>: Sei $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ eine C^*-Unteralg. und sei $\pi: A \to L(H_\pi)$ eine bel. nichtent. $*$-Darst. Sei $\pi \simeq \bigoplus_{[\varrho] \in \hat{A}} m_\varrho \cdot \varrho$ die Zerlegung von π in irreduzible Teildarst. wie in 12.14.

Ist dann $[\varrho] \in \hat{A}$ und $p \in A$ minimale Projektion mit $\varrho(p) \neq 0$, so gilt $m_\varrho = \dim(\pi(p)H)$.

<u>Bew:</u> Nach 12.15 gilt (bis auf unitäre Äquivalenz):

$\pi(p) = \bigoplus_{[\sigma] \in \hat{A}} m_\sigma \sigma(p) = m_\varrho \varrho(p) = \bigoplus_{i \in I_\varrho} \varrho(p)$ und $\varrho(p)$ ist Projektion vom Rang 1. Damit folgt $\dim(\pi(p)H_\pi) = |I_\varrho| = m_\varrho$. ☒

<u>12.17 Def</u>: Sei $\emptyset \neq I$ eine Indexmenge und für alle $i \in I$ sei A_i eine C^*-Algebra. Dann def. wir die direkte Summe

$$A := \bigoplus_{i \in I} A_i \quad \text{d. } C^*\text{-Algebren } A_i,\ i \in I$$

als die Menge aller i-Tupel $(a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in A_i$ $\forall i \in I$ und $(i \mapsto \|a_i\|) \in C_0(I)$.

Dann ist A versehen mit den komponentenweisen Operationen (Addition, Mult, mod) und mit $\|(a_i)_i\| := \sup_{i\in I} \|a_i\|$ eine C^*-Algebra.

A heißt die (C^*-)direkte Summe der A_i, $i \in I$.

12.18 Satz Sei $A \subseteq \mathcal{K}(H)$ eine C^*-Unteralg. Dann gilt $A \simeq \bigoplus_{[\varrho]\in\hat{A}} \mathcal{K}(H_\varrho)$ vermöge $a \overset{\Phi}{\mapsto} (\varrho(a))_{[\varrho]\in\hat{A}}$.

Bew: Wir zeigen zunächst, dass $([\varrho] \mapsto \|\varrho(a)\|) \in C_0(\hat{A})$ (wobei wir $\hat{A}$ mit der diskreten Top. versehen). Dies ist genau dann der Fall, wenn $([\varrho] \mapsto \|\varrho(a)\|^2) \in C_0(\hat{A})$, und wegen $\|\varrho(a)\|^2 = \|\varrho(a^*a)\|$ können wir o.B.d.A $a = a^*$ annehmen. Dann gilt

$$a = \sum_{\lambda\in\sigma(a)} \lambda P_\lambda$$

und zu $\varepsilon > 0$ ex. $F \subseteq \sigma(a)\setminus\{0\}$ endl. mit $|\lambda| < \varepsilon$ $\forall \lambda \notin F$. Nach 12.4 ist jedes P_λ für $\lambda \in F$ eine endl. Summe von minimalen Projekt., also ex. eine Zerlegung

$$\tilde{a} = \sum_{\lambda\in F} \lambda P_\lambda = \sum_{j=1}^{N} \mu_j P_j \quad \text{mit } P_j \in A \text{ minimal } \forall j.$$

Nach 12.15 ex. $[\varrho_1], \dots, [\varrho_N] \in \hat{A}$ mit $\varrho_j(P_j) \neq 0$, und dann gilt $\sigma(P_j) = 0$ $\forall [\sigma] \in \hat{A}$ mit $\sigma \not\simeq \varrho_j$.
Damit folgt für alle $[\sigma] \in \hat{A} \setminus \{[\varrho_1], \dots, [\varrho_N]\}$

$$\|\sigma(a)\| = \|\sigma(\sum_{\lambda\notin F} \lambda P_\lambda)\| \leq \|\sum_{\lambda\notin F} \lambda P_\lambda\| < \varepsilon,$$

d.h. $a \mapsto (\varrho(a))_{[\varrho]\in\hat{A}}$ ist wohldef. $*$-Homom. von A nach $\bigoplus_{[\varrho]\in\hat{A}} \mathcal{K}(H_\varrho)$. $\Phi: A \to \bigoplus_{[\varrho]\in\hat{A}} \mathcal{K}(H_\varrho)$; $a \mapsto (\varrho(a))_{[\varrho]\in\hat{A}}$ ist auch injektiv, denn zu jedem $0 \neq a \in A$

ex. ein $[\varrho]\in\hat{A}$ mit $\varrho(a)\neq 0$, und dann gilt auch $\Phi(a)\neq 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi(A)$ dicht in $\bigoplus_{[\varrho]\in\hat{A}} \mathcal{K}(H_\varrho)$ gilt (Surjektivität folgt dann, da $\Phi(A)$ außerdem abg. in $\bigoplus_{\hat{A}}\mathcal{K}(H_\varrho)$ ist.).

Dazu genügt es zu zeigen, dass
$$\Phi(A)\supseteq \bigoplus_{alg.}\mathcal{K}(H_\varrho) = \{(T_\varrho)_\varrho \mid T_\varrho\in\mathcal{K}(H_\varrho) \;\exists F\subseteq\hat{A} \text{ endl. mit } T_\varrho = 0 \;\forall \varrho\notin F\}$$

Sei dazu $[\varrho]\in\hat{A}$ fest. Ist dann $p\in A$ minimale Proj mit $\varrho(p)\neq 0$ (ex. da $\varrho\neq 0$), so liefert 12.15, dass $\varrho(\overline{ApA}) = \overline{\varrho(ApA)} = \mathcal{K}(H_\varrho)$, und
$$\sigma(\overline{ApA}) = \{0\} \quad \forall [\sigma]\in\hat{A},\ \sigma\neq\varrho.$$
Damit ex. zu jedem $\varrho\in\hat{A}$, $T_\varrho\in\mathcal{K}(H_\varrho)$ ein $a_\varrho\in A$ mit $\varrho(a_\varrho) = T_\varrho$, $\sigma(a_\varrho) = 0 \;\forall \sigma\neq\varrho$.

Ist dann $F\subseteq\hat{A}$ endlich und $T_\varrho\in\mathcal{K}(H_\varrho)$ für $[\varrho]\in F$ geg., so setze $a := \sum_{[\varrho]\in F} a_\varrho$. Dann gilt
$$\varrho(a) = T_\varrho \quad \forall [\varrho]\in F, \quad \sigma(a) = 0 \quad \forall [\sigma]\notin F. \qquad \blacksquare$$

<u>12.18</u> <u>Definition</u> Eine C^*-Algebra A heißt GCR-Algebra, falls für jede irreduzible Darst. $\pi: A\to L(H_\pi)$ gilt: $\pi(A)\supseteq\mathcal{K}(H_\pi)$.

<u>Beachte</u>: Aus 12.08 folgt: A ist GCR g.d.w. für jede irred. Darst $\pi(A)\cap\mathcal{K}(H_\pi)\neq\{0\}$ gilt.

<u>Erinnerung</u>: Ist A C^*-Algebra, so ist
$$\mathrm{Prim}(A) := \{\mathrm{Ker}\,\pi \mid [\pi]\in\hat{A}\}$$
der Raum der primitiven Ideale von A. Es gilt dann

<u>12.19</u> <u>Satz</u> Sei A eine GCR-Algebra. Dann ist die Abb. $\hat{A}\to\mathrm{Prim}(A);\ [\pi]\mapsto\mathrm{Ker}\,\pi$ bijektiv.

Bew: Wir müssen zeigen: Sind π, ϱ irred. Darst. von A mit $\ker\pi = \ker\varrho$, so folgt $\pi \simeq \varrho$.
Sei dazu $J := \ker\pi = \ker\varrho \subseteq A$. Dann gilt $[\pi], [\varrho] \in \widehat{A/J}$ und wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\ker\pi = \{0\} = \ker\varrho$.
Sei dann $I := \pi^{-1}(\mathcal{K}(H_\pi)) \subseteq A$. Dann ist $I \cong \mathcal{K}(H_\pi)$ ein Ideal in A und da $\varrho(I) \neq \{0\}$ ist $\varrho|_I : I \to \mathcal{L}(H_\varrho)$ eine irred. Darst. von I.
Da $I \cong \mathcal{K}(H_\pi)$ folgt $\varrho|_I \simeq \pi|_I$ und dann auch $\varrho \simeq \pi$ auf A ∎

Bemerkung: Ein sehr tiefes Resultat von Glimm zeigt: Ist A separabel, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(1) $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$; $[\pi] \mapsto \ker\pi$ ist bijektiv.
(2) A ist GCR-Algebra.
(3) A ist eine Typ I-Algebra (was immer das heißen mag!).
(Siehe z.B. Dixmier, C^*-Algebras, Chapter 9.)

Eine Kernfrage ist die folgende: Sei A eine bel. C^*-Algebra, so dass A bis auf Äquivalenz nur eine irreduzible Darst. besitzt. Gilt dann $A \cong \mathcal{K}(H)$ für einen Hilbertraum H?
Ist A separabel, so ist die Antwort ja!
Ist A nicht separabel, so ist die Frage bekannt als Naimarks Problem. In 2004 konnten Akemann und Weaver zeigen, dass diese Frage im Rahmen der übl. Mengenlehre nicht entscheidbar ist!